

## 3 次方程式あれこれ

ギリシア世界で  $x^3 = k$  なる形の 3 次方程式を扱った最古のものは、B.C. 350 年頃のメナエクモスのものであろう (B.C. 2000 年頃のバビロニアにおいては 3 乗根の表が作られていたが)。それは  $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$  を解けというものだった。  $y^2 = bx$  と  $xy = ab$  より  $y^3 = ab^2$  を得る。

次に 3 次方程式が現れるのがアルキメデスの問題であった ( $x^3 + bc^2 = cx^2$ )。

ディオファントスは幾何学上の問題を解くために、3 次方程式  $x^3 + x = 4x^2 + 4$  を解いた。

上記のこと以外に 3 次方程式についてはギリシア人の間に何も知られていない。9 世紀になって、アラビア人によって上記のアルキメデスの問題がとり上げられた。アルマーニ (c. 860) がこれを取り上げ 3 次方程式  $x^3 + a^2b = cx^2$  を持ち出した。彼による新しい貢献はなかったが、この方程式は当時のアラビア人学者たちによりアルマーニの方程式と呼ばれる栄に浴した。同時代人のタビット・イブン・クッラ (c. 870) は 3 次方程式の特殊なもの考えたが、彼はそれを幾何学的方法により解き、代数学的方法に関しては貢献することができなかった。

アブ・ジャファール・アル・ファズィン (c. 960) は上記の 3 次方程式を円錐曲線の助けを借りて解いたといわれている。アルハゼン (c. 1000) も同じ方程式を  $x^2 = ay$  (放物線) と  $y(c-x) = ab$  (双曲線) の交わりを見つけることによって解いたとオマール・カイヤムが述べている。

オマール・カイヤム (c. 1100) は 13 種類の 3 次方程式を表にしており、それらと 2 つの円錐曲線の交点を求めることにより解いた。オマール・カイヤムは証明なしに、 $x^3 + y^3 = z^3$  は正の整数解をもたないと述べたということである (フェルマーの問題の最初のもの)。

アラビア人は 3 次方程式の一般解法は不可能であると信じていたのだろうといわれている。

インドではバスカラ (c. 1150) が 3 次方程式  $x^3 + 12x = 6x^2 + 35$  を唯一例挙げているだけで、これも試算により  $x = 5$  が容易に求められるものである。

中世ヨーロッパにおいては 3 次方程式を解く試みが散発的になされている。フィボナッチは、パレルモの学者ヨハネスより 3 次方程式  $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$  を解くように依頼を受けた。その考案を著作「Flos」(c. 1225) において説明している。はじめにその解は  $1 < x < 2$  をみたすことを推論し、次に解が無理数であることをつきとめるが、ここで彼は分析を突然中断し、いかなる方法で求めたのか分からないが、解の近似値を与えている。この近似値は極めて誤差の小さなものである。

その後 13 世紀の名もない著者たちの試みがいくつかあるがとるに足りない。

パチオリは 3 次方程式の一般解法は本質的に不可能であると主張した (1494)。

ドイツにおいては何らかの価値ある試みをした唯一の人物ドルフ (1525) がいる。そのほか、1567 年アムステルダムで出版された、デヴェンターのニコラス・ペトリの論文がある。

3 次方程式に関して真に興味あるものはイタリアの代数学者たちの論文であった。カルダーノは「アルス・マグナ」(1545) においてシピオーネ・デル・フェッロが 1515 年頃に  $x^3 + bx = c$  の型の方程式の解法を発見し、弟子のフロリドにもらしたと述べているが、その解法の出所は知られていない。フェッロはそれをあるアラビア人の学者から受け取ったかも知れないし、彼自身で発見したのかもしれない (彼は数学的能力が欠けているように見えるにもかかわらず)。フェッロの解法発見の時期についてタルタリアが 1506 年といっていることを除けば、タルタリアとカルダーノの意見は合っている。カルダーノはさらに次のように述べている。フロリドはタルタリアと数学合戦を行って、その結果タルタリアはフェッロが解いたと同じ 3 次方程式の解法を発見し、カルダーノの要求に応じてその解法を彼に明かした。タルタリアは彼の側のかかなり異なる事情をはっきりと述べている。それによると、ブレッシアの数学教師ズアンネ・デ・トニーニ・ダ・コイが 1530 年に彼に 2 つの方程式  $x^3 + 3x^2 = 5$ ,  $x^3 + 6x^2 + 8x = 1000$  を解くように挑戦状のような手紙を送って来たが、1535 年にタルタリアは  $x^3 + ax^2 = c$  の型の方程式の解法を発見した。タルタリアはさらに述べる。彼は 1535 年にフロリドと合戦を行ったが、彼がフロリドが解法を

知っている  $x^3 + bx = c$  の型の方程式を解くことさえできれば、ズアンネが出した問題  $x^3 + ax^2 = c$  をつきつけることで相手を打ち負かすことができることを知った。そこでタルタリアは大いに努力し、合戦の前に  $x^3 + bx = c$  の解法の発見に成功し、かくして、タルタリアはフロリドが解けない問題を提出して、フロリドが出した問題をすべて解くことができ、合戦に勝利した。

ズアンネはタルタリアの見出した方法を公表するようしつこく頼んだが、タルタリアは断った。1539年にカルダーノはタルタリアに手紙を出し、面会して、タルタリアに3次方程式の解法の教示を迫った。そして、カルダーノは、秘密を保持することを宣誓の上で、秘密めかした詩の文句で解法の教えをタルタリアより受けたと認めているが、詳しい説明は全く受けていないといっている。

タルタリア以前に、ボローニヤのシピオーネ・デル・フェッロが3次方程式の解法を発見していたという噂があって、カルダーノはそれが真実であるかどうかを確かめるため、1543年に彼はボローニヤに赴き、フェッロの遺稿を調査する許可を得て、調べたところ、その中に3次方程式の解法がはっきりと説明されていた。これで3次方程式の解法はタルタリアだけの独創ではないことがはっきりしたので、カルダーノは3次方程式の解法を公表することを決心した。彼の著作「アルス・マグナ」(1545)において、 $x^3 + px = q$  の解法はシピオーネ・デル・フェッロにより発見されたが、その後タルタリアにより再発見され、さらに彼は  $x^3 = px + q$ ,  $x^3 + q = px$  の解法も発見したと述べている。さらに4次方程式の解法も説明し、それは弟子のフェッラーリに負っていると言っている。「アルス・マグナ」が出版されるや、タルタリアは激怒した。その翌年、彼はカルダーノの宣誓の話を、宣誓の原文とともに詳細に公表した。苛立ったタルタリアはカルダーノに数学合戦を挑んだが、カルダーノは現われず、代りに弟子のフェッラーリが来た。フェッラーリはタルタリアに勝利し、タルタリアは名声と収入をともに失った。

「アルス・マグナ」におけるカルダーノの独創性は4つある。第一に、一般の3次方程式を  $x^3 + bx = c$  に帰着できるとした点、第二に、 $\sqrt[3]{\phantom{x}}$  の中が虚数になる場合の議論をしていること、第三に、解の個数についてアイデアをもって論じていること、第四に、対称式の議論を始めていることである(解と係数の関係)。

4次方程式の解法にまつわる逸話は次の通りである。ズアンネ・デ・トニーニ・ダ・コイがカルダーノに次の方程式

$$x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$$

を解くように挑戦して来た。カルダーノは解こうと試みたができなかったので、弟子のフェッラーリにこれを与えた。フェッラーリはみごとにこれを解くことに成功した。かくして4次方程式の解法が見出された。フェッラーリは著作を残さず38歳で死んだ。恐らく彼の妹に毒殺されたのだろうということである。